การทดสอบของฟิเชอร์ (Fisher Exact Test for 2x2 Tables)

หลักการ / สูตร ของสถิติแต่ละตัว

การทดสอบของฟิเชอร์ ใช้กับข้อมูลประเภทความถี่ที่สามารถจัดให้อยู่ในรูปตารางการจรขนาด 2×2 เมื่อต้องการทดสอบว่าสัดส่วนหรือความน่าจะเป็นที่ประชากรสองกลุ่มจะถูกแบ่งออกเป็นสองประเภทเท่า ๆ กัน เป็นการทดสอบความแตกต่างของกลุ่มตัวอย่างที่เป็นอิสระจากกัน ค่าที่ได้จากการวัดแยกขาดจากกัน

ในการทดสอบความเป็นอิสระโดยใช้สถิติทดสอบไคสแควดังกล่าวข้างต้นมาแล้วนั้นเนื่องจากข้อตกลงเบื้องต้นเกี่ยวกับขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่มีขนาดใหญ่ ความถี่คาดหวังในแต่ละช่องของตารางแจกแจงความถี่ขนาด $I \times J$ ควรมีจำนวนความถี่มากกว่าหรือเท่ากับ 5 หรือถ้ามีจำนวนความถี่น้อยกว่า 5 ก็มีได้ไม่เกิน 20% ของจำนวนช่องทั้งหมดในตาราง เป็นข้อตกลงเบื้องต้นของสถิติทดสอบไคสแคว แต่ถ้าไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นนี้ การใช้สถิติทดสอบไคสแควก็ไม่เหมาะสม กรณีเช่นนี้เราสามารถใช้สถิติทดสอบ ซึ่งมีวิธีการคำนวณค่านัยสำคัญของค่าสถิติทดสอบด้วยการแจกแจงที่แท้จริงของตัวสถิติทดสอบซึ่งได้แก่การแจกแจงแบบไฮเปอร์ยีออเมตริก (hypergeometric distribution) เรียกว่า การทดสอบ Exact. Test และเรียกค่านัยสำคัญที่คำนวณได้ว่า Exact Sig. หรือ Fisher’s Exact Sig. ซึ่งเป็นนัยสำคัญที่แท้จริงของสถิติทดสอบซึ่งถูกต้องมากกว่าการคำนวณค่านัยสำคัญจากวิธีการประมาณการแจกแจงของสถิติทดสอบให้เป็นแบบไคสแคว ซึ่งจะได้ค่านัยสำคัญโดยประมาณ เรียกว่า Asymptotic Sig.

ประเภท			
	I	A	B
	II	C	D

เมื่อ A,B,C,D เป็นจำนวนข้อมูลในแต่ละกลุ่ม แต่ละประเภท

สูตร $$P = \frac{(A+B)!(C+D)!(A+C)!(B+D)!}{N!A!B!C!D!}$$

ข้อตกลงเบื้องต้น

1 ระดับการวัดอยู่ในมาตรานามบัญญัติหรือมาตราเรียงอันดับ

2 กลุ่มตัวอย่าง 2 กลุ่มที่เป็นอิสระจากกัน โดยแต่ละกลุ่มแบ่งเป็นสองประเภท หรือสองลักษณะ เช่น ชาย – หญิง, พ่อ – แม่, พรรครัฐบาล – พรรคฝ่ายค้าน เป็นต้น และสามารถจัดอยู่ในตารางการจร ขนาด 2×2

ในทางปฏิบัติควรใช้การทดสอบ Exact Test ในกรณีต่อไปนี้

(1) กลุ่มตัวอย่างมีขนาดเล็ก

(2) ข้อมูลอยู่ในตารางขนาด 2×2 และกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก หรือจำนวนความถี่คาดหวังในแต่ละช่องของตารางมีค่าน้อยกว่า 5

(3) จำนวนความถี่คาดหวังในแต่ละช่องของตารางขนาด $I \times J$ มีค่าน้อยกว่า 5 เกิน 20%ของจำนวนช่องทั้งหมดในตารางข้อมูล

(4) ในตารางข้อมูล มีจำนวนหลายช่องที่มีจำนวนความถี่ที่สังเกตได้เป็นศูนย์

(5) ในตารางข้อมูล มีจำนวนแถวและจำนวนคอลัมน์แตกต่างกันมาก เช่น ข้อมูลอยู่ในตารางขนาด 25 $\times$ 3

(6) ในตารางข้อมูล มีจำนวนความถี่ที่สังเกตได้ในแต่ละช่องของตารางไม่สมดุลกันคือบางช่องมีจำนวนความถี่มาก ๆ ขณะที่บางช่องมีจำนวนความถี่น้อยมาก บางครั้งอาจน้อยกว่าหรือเท่ากับ 5

สมมติฐานทางสถิติ

สมมติฐานทางสถิติที่ต้องการทดสอบความเป็นเอกพันธ์หรือการทดสอบสัดส่วนของ 2 ประชากร **สำหรับการทดสอบสองทาง**

สมมติฐานที่ต้องการทดสอบคือ

H_0: โอกาสที่กลุ่ม 2 กลุ่ม ถูกจำแนกประเภทเป็นประเภท I และ II มีเท่ากัน

H_1: โอกาสที่กลุ่ม 2 กลุ่ม ถูกจำแนกประเภทเป็นประเภท I และ II แตกต่างกัน

สมมติฐาน สัญลักษณ์ทางสถิติ

$H_0 : p_1 = p_2$

$H_1 : p_1 \neq p_2$

สำหรับการทดสอบทางเดียวสมมติฐานแย้ง คือ

$H_0 : p_1 = p_2$

$H_1 : p_1 > p_2$ หรือ $H_1 : p_1 < p_2$

สมมติฐานทางสถิติที่ต้องการทดสอบความเป็นอิสระ โดยพิจารณาจากค่า odds ratio ถ้าค่า odds ratio เท่ากับ 1 หมายความว่าไม่มีความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรทั้ง 2 ตัว ในที่นี้ให้ oddsratio แทนด้วย θ ดังนั้น สมมติฐานที่ต้องการทดสอบคือ

H_0: $\theta = 1$

H_1: $\theta > 1$

ในกรณีข้อมูลอยู่ในตารางขนาด 2 $\times$ 2 การแจกแจงความน่าจะเป็นสำหรับกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็กที่การสุ่มตัวอย่างเป็นการสุ่มแบบไม่คืนที่และมีข้อจำกัดเกี่ยวกับผลรวมทางแถวและคอลัมน์เท่ากัน การแจกแจงนี้เรียกว่า ไฮเปอร์ยีออเมตริก ซึ่งในการคำนวณความน่าจะเป็นต้องใช้หลักการจัดหมู่ (combination)

อาณาเขตวิกฤตและการสรุปผล

จะปฏิเสธสมมติฐาน H_0 เมื่อค่า P ที่คำนวณได้มีค่าน้อยกว่าค่า α

ตัวอย่างทางสถิติ การทดสอบของฟิเชอร์ (Fisher Exact Test for 2x2 Tables)

ตัวอย่าง 1 ในการสุ่มตัวอย่างนักศึกษาปริญญาเอกที่เรียนวิชาสถิติชั้นสูงมา 20 คน เป็นชาย 8 คน หญิง 12 คน ปรากฏว่า นักศึกษาชายสอบผ่าน 6 คน ส่วนนักศึกษาหญิงสอบผ่าน 10 คน จงทดสอบสมมติฐานว่าสัดส่วนของนักศึกษาชายที่สอบผ่านมากกว่าสัดส่วนของนักศึกษาหญิงที่สอบผ่านใช่หรือไม่ โดยใช้ระดับความมีนัยสำคัญ .01

สมมติฐานทางสถิติ

$H_0 : p_1 = p_2$

$H_1 : p_1 \neq p_2$

เมื่อนำข้อมูลที่โจทย์กำหนดให้มาใส่ลงในตารางการจร ได้ดังนี้

ผลการสอบ	จำนวนนักศึกษา		รวม
	ชาย	หญิง	
ผ่าน	A=6	B=10	A+B=16
ไม่ผ่าน	C=2	D=2	C+D=4
รวม	A+C=8	B+D=12	N=A+B+C+D=20

คำนวณค่าสถิติ

สูตร $$P = \frac{(A+B)!(C+D)!(A+C)!(B+D)!}{N!A!B!C!D!}$$

$$P = \frac{16!4!8!12!}{20!6!10!2!2!} = 0.38$$

ตัวอย่างที่ 2

การทดลองเรื่องรสชาดของชา วิธีการชงน้ำชาในการทดลองนี้ทำได้ 2 แบบคือ การใส่นมหรือชาลงในถ้วยก่อนเป็นอันดับแรก ออกแบบการทดลองโดยให้ผู้ทดลองชิมชา 8ถ้วย ซึ่งประกอบด้วยถ้วยชาที่ใส่นมลงในถ้วยก่อนเป็นอันดับแรก 4 ถ้วย และอีก 4 ถ้วยใส่ชาก่อนเป็นอันดับแรก และบอกให้ผู้ทดลองทราบว่ามีชนิดละ 4 ถ้วย แล้วให้ผู้ทดลองเดาว่าถ้วยใดใส่นมเป็นอันดับแรก โดยให้ลำดับการชิมแต่ละถ้วยเป็นไปอย่างสุ่ม สมมติฐานที่ต้องการทดสอบคือ ผลการเดาของผู้ทดลองชิมชาเป็นอิสระกับอันดับการใส่นมในการชงชา สมมติฐานแย้งคือมีความสัมพันธ์ระหว่างผลการเดาของผู้ทดลองชิมชากับอันดับการใส่นมในการชงชา หรือเขียนเป็น

สัญลักษณ์ได้คือ $H_0 : \theta = 1$

$H_1 : \theta > 1$

การออกแบบการทดลองนี้ทำให้ผลรวมทางคอลัมน์เท่ากับผลรวมทางแถวเท่ากับ 4 เนื่องจากผู้ทดลองชิมชาทราบแล้วว่ามีถ้วยที่ใส่นมก่อนเป็นอันดับแรกจำนวน 4 ถ้วย นั่นคือ การแจกแจงมาจินัลทั้งทางแถวและคอลัมน์เป็นแบบกำหนด

สูตร $$P = \frac{(A+B)!(C+D)!(A+C)!(B+D)!}{N!A!B!C!D!}$$

ตารางที่ 1 ข้อมูลผลการเดาของผู้ทดลองชิมชาและอันดับการใส่นมหรือชาก่อนเป็นอันดับแรกในการชงชาอันดับการใส่ก่อน ผลการเดาของผู้ทดลองชิมชา

อันดับการใส่ก่อน	ผลการเดาของผู้ทดลองชิมชา		
	นม	ชา	รวม
นม	$n_{11} = 3$	$n_{12} = 1$	4
ชา	$n_{21} = 1$	$n_{22} = 3$	4
รวม	4	4	8

ในตารางข้อมูลขนาด 2×2 ข้างต้น ที่มีผลรวมทางด้านแถวเท่ากับ 4 และผลรวมทางด้านคอลัมน์ เท่ากับ 4 การแจกแจงของ n_{11} คือ การแจกแจงไฮเปอร์ยีออเมตริก สิ่งที่สนใจศึกษาคือความน่าจะเป็นของการเดาถูกว่าถ้วยใดใส่นมก่อนเป็นอันดับแรก ค่าของ n_{11} ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ (0 , 1 , 2 , 3 , 4) ตัวอย่างการคำนวณความน่าจะเป็นของ n_{11} ดังนี้

คำนวณความน่าจะเป็นของ n_{11} เท่ากับ 3 คือ

$$\mathrm{P}(3) = \frac{\binom{4}{3}\binom{4}{1}}{\binom{8}{4}} = .229$$

และความน่าจะเป็นของ n_{11} เท่ากับ 4 คือ

$$\mathrm{P}(4) = \frac{\binom{4}{4}\binom{4}{0}}{\binom{8}{4}} = .014$$

ถ้าผู้ทดลองชิมชาเดาถูกทั้ง 3 ถ้วย สำหรับการทดสอบทางเดียว สมมติฐานแย้งคือ H_1 : 0> 1 ค่า P-value เท่ากับความน่าจะเป็นทางหางด้านขวาที่ผลการเดาถูกว่าถ้วยใดใส่นมก่อนเป็นอันดับแรกเป็นจำนวนนับ n_{11} อย่างน้อยที่สุดใหญ่เท่ากับค่าสังเกต นั่นคือ P-value = P(3) +P(4) = .243 ซึ่งมากกว่าระดับนัยสำคัญที่กำหนด (α = .05) จึงสรุปว่าไม่สามารถปฏิเสธ H_0

แสดงว่าผลการเดากับอันดับการใส่นมในการชงชาเป็นอิสระกัน ถ้าผู้ทดลองชิมชาเดาถูกทั้ง 4 ถ้วย คือ $n_{11} = 4$ คำนวณความน่าจะเป็นได้ P(4) = .014 ซึ่งน้อยกว่าระดับนัยสำคัญที่กำหนด ($\alpha = .05$) จึงสรุปได้ว่า ผลการเดากับอันดับการใส่นมในการชงชามีความสัมพันธ์กัน เราสามารถคำนวณ ค่าสถิติไคสแควและค่า P-value ของค่าสังเกต n_{11} ที่เป็นไปได้ทั้งหมดดังตารางที่ 1

ตารางที่ 2 ค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงไฮเปอร์ยีออเมตริกของผลการเดา (n_{11}) และการคำนวณค่าสถิติไคสแควและ P-value

n_{11}	ความน่าจะเป็น	P - value	X^2
0	.014	1.000	8.0
1	.229	.986	2.0
2	.514	.757	0.0
3	.229	.243	2.0
4	.014	.014	8.0

ตัวอย่างการคำนวณค่าสถิติไคสแควในตารางที่ 2 คำนวณได้จากสูตร

$$X^2 = \sum_i \sum_j \frac{(O_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}}$$

เมื่อ $E_{ij} = \dfrac{r_i \times c_j}{n}$

ดังนั้นที่ $n_{11} = 3$ คำนวณค่าสถิติไคสแควได้คือ

$$\begin{aligned} X^2 &= \frac{(3-2)^2}{2} + \frac{(1-2)^2}{2} + \frac{(1-2)^2}{2} + \frac{(3-2)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

การใช้คำสั่ง Crosstab ทดสอบความเป็นอิสระสำหรับกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็กและข้อมูลอยู่ในตารางขนาด I $\times$ J

จากตัวอย่างการทดลองการชงน้ำชา กำหนดให้ตัวแปรอันดับการใส่นมหรือชาเป็นอันดับแรกแทนด้วย order (1 = milk , 2 = tea) และตัวแปรผลการเดาของผู้ทดลองชิมชาแทนด้วย guess(1 = milk , 2 = tea) บันทึกข้อมูลในแฟ้มข้อมูล exact1.sav มีรูปแบบดังตารางที่ 3

ตารางที่ 3 รูปแบบของการบันทึกข้อมูลการทดลองการชงน้ำชา

order	guess	count
1	1	3
1	2	1
2	1	1
2	2	3

ขั้นตอนการทดสอบความเป็นอิสระระหว่างตัวแปรอันดับการใส่นมและตัวแปรผลการเดาโดยใช้การทดสอบ Fisher’s Exact Test เราสามารถใช้โปรแกรม SPSS ช่วยในการคำนวณ
ดังนี้

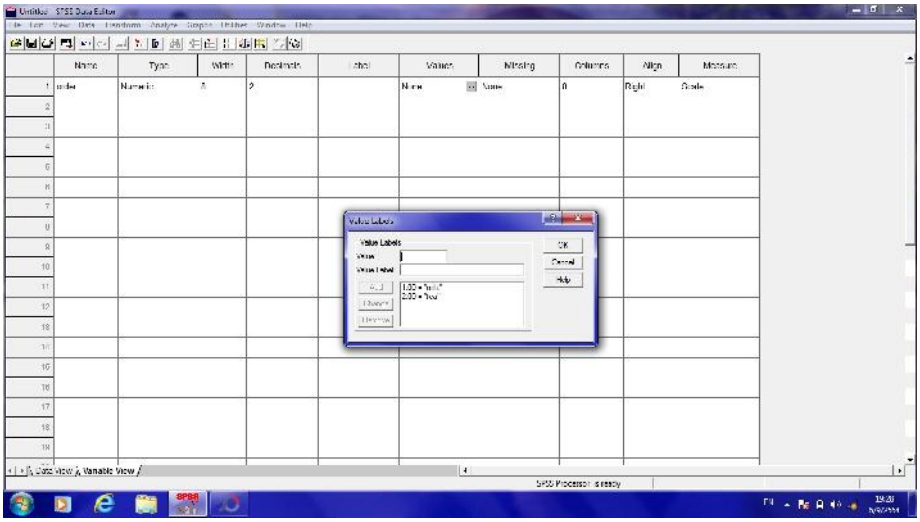
1. ไปที่เมนูบาร์ คลิกที่ Data , Weight Cases … จะได้หน้าต่าง Weight Cases คลิกที่O Weight cases by และคลิกให้ตัวแปร count ย้ายเข้าไปอยู่ในช่อง Frequency Variable : แล้วคลิกที่ปุ่ม OK หน้าต่างนี้จะถูกปิดไป

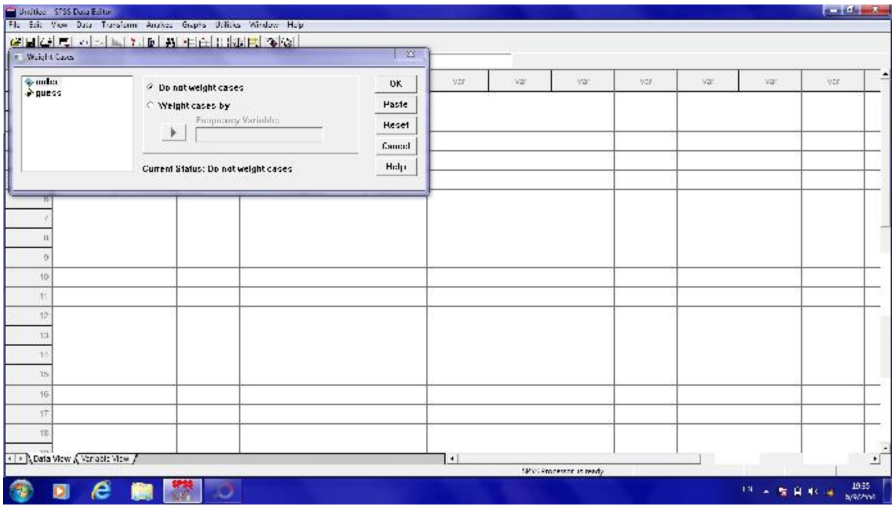
2. ไปที่เมนูบาร์ คลิกที่ Analyze , Descriptive Statistics, Crosstabs … จะได้หน้าต่างCrosstabs

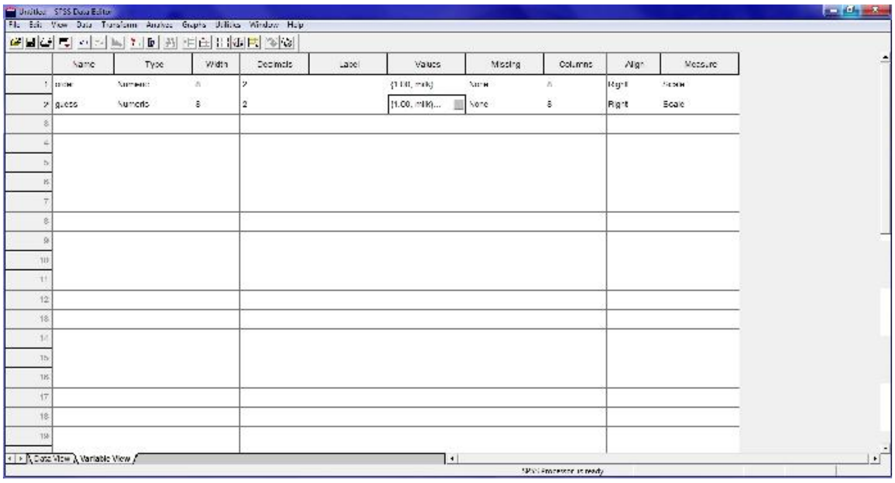
3. ในหน้าต่าง Crosstabs คลิกที่ตัวแปร order ให้ย้ายเข้าไปอยู่ในช่อง Row(s) : แล้วคลิกที่ตัวแปร guess ให้ย้ายเข้าไปอยู่ในช่อง Column(s) : คลิกที่ปุ่ม Statistics … จะได้หน้าต่าง Crosstabs : Statistics

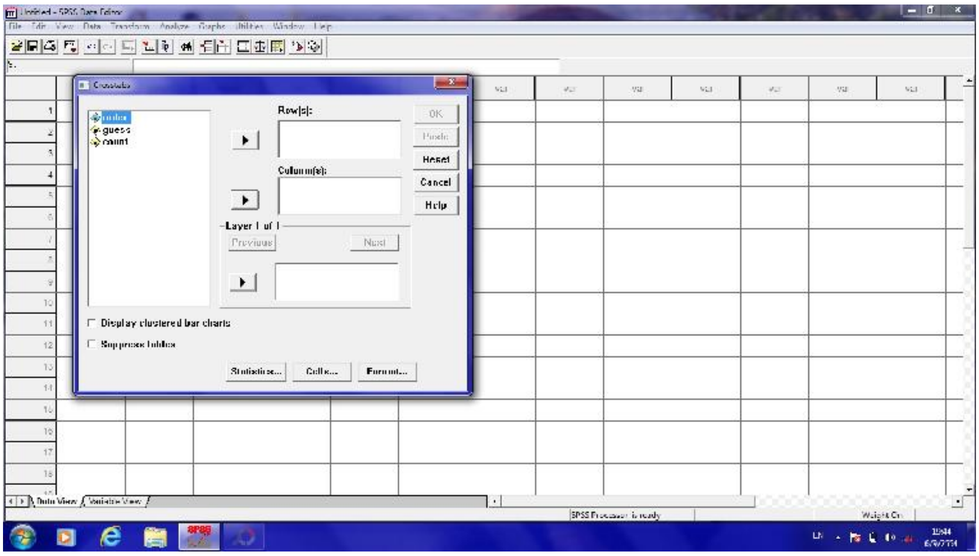
4. ในหน้าต่าง Crosstabs : Statistics คลิกที่ □ Chi – square เพื่อจะได้ผลลัพธ์ Fisher’s Exact Test คลิกที่ปุ่ม Continue หน้าต่างนี้จะถูกปิดไป

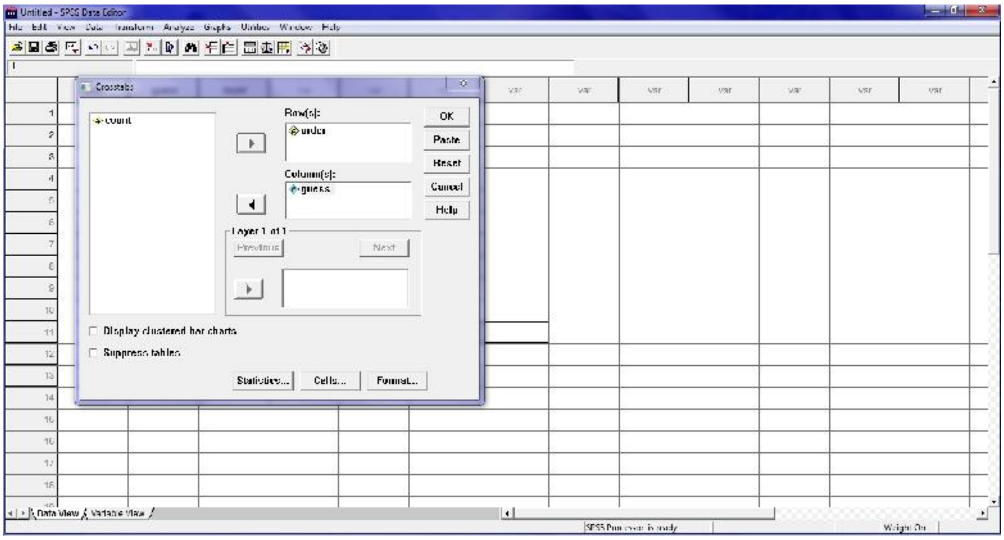
5. ในหน้าต่าง Crosstabs คลิกที่ปุ่ม OK จะได้ผลลัพธ์ดังภาพ

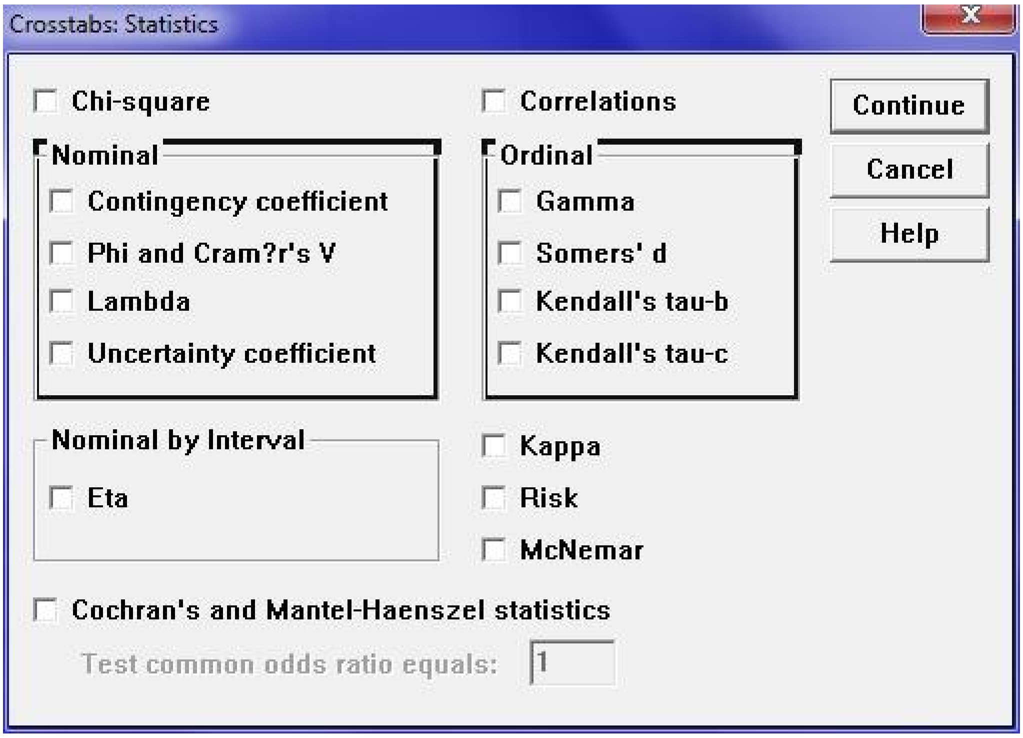

Name
Type
Width
Decimals
Values
Missing
Columns
Align
Measure
Value Labels
OK
Cancel
Help
Data View
Variable View
SPSS Processor is ready

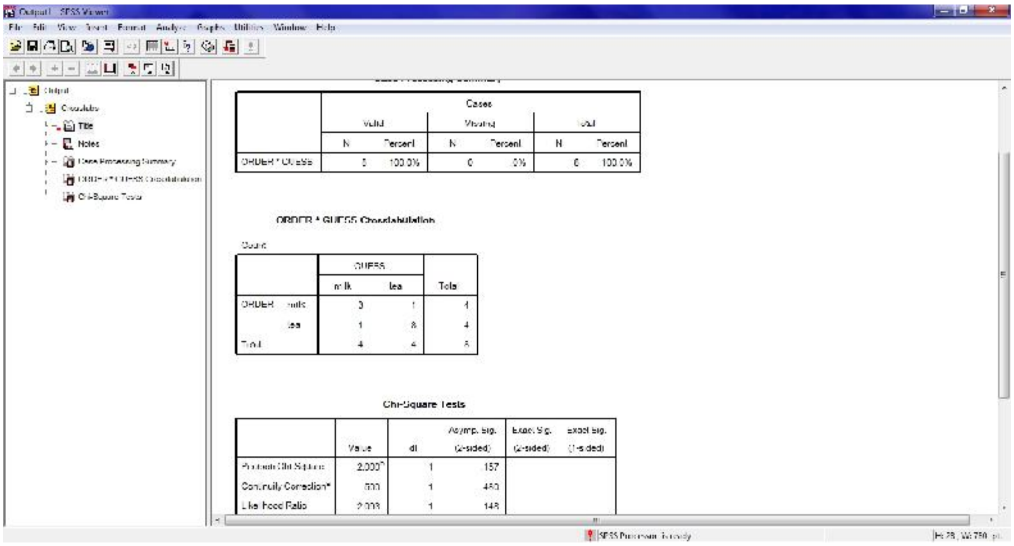

Weight Cases
guess
Do not weight cases
Weight cases by
Frequency Variable:
OK
Paste
Reset
Cancel
Help
Current Status: Do not weight cases
Data View
Variable View
SPSS Processor is ready


File
Edit
View
Data
Transform
Analyze
Graphs
Utilities
Window
Help
Name
Type
Width
Decimals
Label
Values
Missing
Columns
Align
Measure
guess
Numeric
8
2
{1.00, milk}...
None
8
Right
Scale
Data View
Variable View
SPSS Processor is ready


Crosstabs
Row(s):
Column(s):
Layer 1 of 1
OK
Reset
Cancel
Help
Display clustered bar charts
Suppress tables
Statistics...
Cells...
Format...


Untitled - SPSS Data Editor
Crosstabs
count
Row(s):
order
Column(s):
guess
Layer 1 of 1
Previous
Next
OK
Paste
Reset
Cancel
Help
Display clustered bar charts
Suppress tables
Statistics...
Cells...
Format...





Crosstabs

Case Processing Summary

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
ORDER * GUESS	8	100.0%	0	.0%	8	100.0%

ORDER * GUESS Crosstabulation

Count

		GUESS		Total
		milk	tea	
ORDER	milk	3	1	4
	tea	1	3	4
Total		4	4	8

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	2.000[b]	1	.157		
Continuity orrection [a]	.500	1	.480		
Likelihood Ratio	2.093	1	.148		
Fisher's Exact Test				.486	.243
Linear-by-Linear Association	1.750	1	.186		
N of Valid Cases	8				

a Computed only for a 2x2 table

b 4 cells (100.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 2.00.

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)	Point Probability
Pearson Chi-Square	2.000[b]	1	.157	.486	.243	
Continuity Correction(a)	.500	1	.480			
Likelihood Ratio	2.093	1	.148	.486	.243	
Fisher's Exact Test				.486	.243	
Linear-by-Linear Association	1.750[c]	1	.186	.486	.243	.229
N of Valid Cases	8					

a. Computed only for a 2x2 table

b. 4 cells (100.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 2.00.

c. The standardized statistic is 1.323.

ผลลัพธ์ที่ได้คือ

1. ผลสรุปจำนวนตัวอย่างทั้งหมดที่นำมาวิเคราะห์ N = 8 คิดเป็น 100% ดูในตารางCase Processing Summary

2. ตารางข้อมูลขนาด 2×2 ดูในตาราง order * guess Crosstabulation

3. ผลการทดสอบความเป็นอิสระของตัวแปร order และ guess ดูในตาราง Chi –Square Tests ได้ค่าสถิติ Pearson Chi-Square เท่ากับ 2.000 ซึ่งไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นคือมีค่าความถี่ที่คาดหวังในเซล (i,j) คือ E_{ij} ของช่องใด ๆ ในตารางที่มีค่าน้อยกว่า 5 ทั้งหมดทุกช่องของตารางขนาด 2×2 ดูที่บรรทัด Fisher's Exact Test ในคอลัมน์ Exact Sig. (1-sided) เท่ากับ.243 ซึ่งมากกว่าระดับนัยสำคัญที่กำหนด (α = .05) สรุปได้ว่ายอมรับ H_0 นั่นคือ ผลการเดาและอันดับการใส่นมในการชงชาเป็นอิสระกัน หรือไม่มีความสัมพันธ์กัน

การทดสอบความเป็นอิสระด้วยการทดสอบ exact test กรณีข้อมูลอยู่ในตารางขนาดใหญ่

1 สำหรับกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก

กรณีที่ข้อมูลอยู่ในตารางที่มีขนาดใหญ่กว่า 2×2 ทดสอบความเป็นอิสระด้วยการทดสอบ exact tests ซึ่งใช้การแจกแจงไฮเปอร์ยีออเมตริกแบบมัลติแวริเอท และใช้ได้กับตารางที่มีผลรวมของข้อมูลทางด้านแถวและคอลัมน์ที่เท่ากันด้วย วิธีการคำนวณด้วยมือทำได้ยากแต่สามารถใช้คอมพิวเตอร์ช่วยได้

ตัวอย่างเช่น สำหรับกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็กที่มีตัวแปร 2 ตัว คือ V1 และ V2 ข้อมูลอยู่ในตารางขนาด 3×9 ซึ่งมีจำนวนความถี่ในช่องของตารางเป็นศูนย์หลายช่อง และมีจำนวนความถี่น้อยกว่า 5 หลายช่อง ดังตารางที่ 4

ตารางที่ 4 ข้อมูลตัวแปร V1 และ V2 อยู่ในตารางขนาด 3×9 สำหรับกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก

V1	V2								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	7	0	0	0	0	0	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	0	0
3	0	8	0	0	0	0	0	0	0

กำหนดให้ตัวแปร V1 (1, 2, 3) และตัวแปร V2 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) มีรูปแบบการบันทึกข้อมูลดังตารางที่5 บันทึกข้อมูลลงในแฟ้มข้อมูล exact2.sav

ตารางที่ 5 รูปแบบการบันทึกข้อมูลของตัวแปร V1 และ V2

V1	V2	count	V1	V2	count	V1	V2	count
1	1	0	2	1	1	3	1	0
1	2	7	2	2	1	3	2	8
1	3	0	2	3	1	3	3	0
1	4	0	2	4	1	3	4	0
1	5	0	2	5	1	3	5	0
1	6	0	2	6	1	3	6	0
1	7	0	2	7	1	3	7	0
1	8	1	2	8	0	3	8	0
1	9	1	2	9	0	3	9	0

การทดสอบความเป็นอิสระด้วยการทดสอบ exact tests มีขั้นตอนการใช้คำสั่ง Crosstabในขั้นตอนที่ 1 ถึง 4 เหมือนกับที่อธิบายไว้แล้ว และเพิ่มอีกขั้นตอนหนึ่งคือ

- ในหน้าต่าง crosstabs คลิกที่ปุ่ม Exact… จะได้หน้าต่าง Exact Tests

- ในหน้าต่าง Exact Tests เลือก O Exact เพื่อจะได้ผลลัพธ์ Exact Tests

และคลิกที่ □ Time limit per test : เป็นการกำหนดเวลาที่ใช้ในการทดสอบซึ่งโดยปกติโปรแกรมจะกำหนดเวลาให้เท่ากับ 5 นาที คลิกที่ปุ่ม Continue หน้าต่างนี้จะถูกปิดไป

- ในหน้าต่าง Crosstabs คลิกที่ปุ่ม OK จะได้ผลลัพธ์ดังภาพ

Crosstabs

V1 * V2 Crosstabulation

Count

V1	V2									Total
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	0	7	0	0	0	0	0	1	1	9
2	1	1	1	1	1	1	1	0	0	7
3	0	8	0	0	0	0	0	0	0	8
Total	1	16	1	1	1	1	1	1	1	24

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)	Point Probability
Pearson Chi-Square	22.286[a]	16	.134	.001		
Likelihood Ratio	24.274	16	.084	.002		
Fisher's Exact Test	20.520			.002		
Linear-by-Linear Association	1.729[b]	1	.189	.213	.109	.020
N of Valid Cases	24					

a. 25 cells (92.6%) have expected count less than 5. The minimum expected count is .29.

b. The standardized statistic is -1.315.

>Warning # 3211

>On at least one case, the value of the weight variable was zero, negative,

>or missing. Such cases are invisible to statistical procedures and graphs

>which need positively weighted cases, but remain on the file and are

>processed by non-statistical facilities such as LIST and SAVE.

ผลลัพธ์ที่ได้ดูในตาราง Chi-Square Tests ได้ค่าสถิติ Pearson Chi-Square เท่ากับ 22.286 ที่ df เท่ากับ 16 ซึ่งไม่เป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นคือมีค่าความถี่ที่คาดหวังในเซล (i,j) คือ E_{ij} ของช่องใด ๆ ในตารางที่มีค่าน้อยกว่า 5 จำนวน 92.6% ของตารางขนาด 3×9 และค่า Asymp.Sig. (2-sided) เท่ากับ .134 แต่ได้ค่า Exact Sig. (2-sided) เท่ากับ .001 เห็นได้ชัดเจนว่าผลต่างกันมากระหว่างผลที่ได้จากวิธีที่ได้จากการประมาณสำหรับกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่ที่ประมาณด้วยการแจกแจงไคสแคว ได้ค่า P-value เท่ากับ .134 กับผลที่ได้จากวิธีใช้การแจกแจงที่แท้จริงของกลุ่มตัวอย่างตามวิธีของ exact test ได้ค่า P-value เท่ากับ .001 ซึ่งน้อยกว่าระดับนัยสำคัญที่กำหนด ($\alpha = .05$) สรุปได้ว่าปฏิเสธ H_0 นั่นคือตัวแปร 2 ตัวนี้มีความสัมพันธ์กัน

2 สำหรับกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่

กรณีที่ข้อมูลอยู่ในตารางที่มีขนาดใหญ่กว่า 2×2 แต่จำนวนความถี่ในแต่ละช่องของตารางไม่สมดุลย์กันคือ บางช่องของตารางมีจำนวนความถี่ มาก ๆ ขณะที่มีบางช่องของตารางมีจำนวนความถี่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 5 การทดสอบความเป็นอิสระของตัวแปร 2 ตัวก็ควรใช้การทดสอบ Exact Test

ตัวอย่างเช่น การศึกษาเกี่ยวกับสภาพการดื่มอัลกอฮอล์ของมารดากับการเกิดของทารกว่าจะแสดงหรือไม่แสดงอาการของโรค malformation ตัวอย่างคือผู้หญิงท้อง 3 เดือน ให้ตัวอย่างกรอกแบบสอบถามเกี่ยวกับสภาพการดื่มอัลกอฮอล์ แล้วติดตามการเกิดของทารก เก็บข้อมูลเกี่ยวกับการแสดงหรือไม่แสดงอาการของโรค malformation แทนด้วยตัวแปร malfor (1 =แสดง , 2 = ไม่แสดง) และตัวแปร alcohol แทนสภาพการดื่มอัลกอฮอล์ของมารดาวัดเป็นจำนวนเฉลี่ยของปริมาณการดื่มต่อวัน ได้ข้อมูลดังตารางที่ 6.12 บันทึกข้อมูลลงในแฟ้มข้อมูล exact3.sav

ตารางที่ 6 ข้อมูลจำนวนทารกเกี่ยวกับการแสดงอาการของโรค malformation และสภาพการดื่มอัลกอฮอล์ของมารดา

สภาพการดื่มอัลกอฮอล์ของมารดา	malformation	
	แสดง	ไม่แสดง
0	17,066	48
<1	14,464	38
1-2	788	5
3-5	126	1
$\geq$6	37	1

ทำการทดสอบความเป็นอิสระระหว่างตัวแปร alcohol และตัวแปร malfor โดยใช้โปรแกรม SPSS ช่วยในการคำนวณโดยใช้คำสั่ง Crosstab ขั้นตอนการใช้คำสั่งอธิบายไว้แล้ว จะได้ผลลัพธ์ดังภาพ

Crosstabs

Case Processing Summary

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
alcohol *malfor	32574	100.0%	0	.0%	32574	100.0%

alcohol *malfor Crosstabulation

Count

		malfor		Total
		แสดง	ไม่แสดง	
alcohol	0	17066	48	17114
	<1	14464	38	14502
	1-2	788	5	793
	3-5	126	1	127
	>=6	37	1	38
Total		32481	93	32574

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)	Point Probability
Pearson Chi-Square	12.082[a]	4	.017	.034		
Likelihood Ratio	6.202	4	.185	.133		
Fisher's Exact Test	10.458			.033		
Linear-by-Linear Association	1.828 [b]	1	.176	.179	.105	.028
N of Valid Cases	32574					

[a] 3 cells (30.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is .11.

[b] The standardized statistic is1.352.

ผลลัพธ์ที่ได้ดูในตาราง Chi-Square Tests ได้ค่าสถิติ Pearson Chi-Square เท่ากับ12.082 และค่าสถิติไคสแควตามวิธี Likelihood Ratio เท่ากับ 6.202 ซึ่งมีค่า Asymp. Sig. (2-sided) เท่ากับ .017 และ .185 ตามลำดับ แต่ถ้าใช้การทดสอบ Exact Tests สำหรับค่าสถิตินี้ซึ่งคิดค่า P-value โดยใช้การแจกแจงที่แท้จริงของ χ^2 และ $\chi^2{}_{LR}$ ได้ค่า Exact. Sig. เท่ากับ .034 และ.133 ตามลำดับ เห็นได้ชัดเจนว่าผลการวิเคราะห์ที่ได้มีความแตกต่างกันสำหรับค่าสถิติทั้ง 2 ตัวนี้

ปัญหาของการสรุปผลการวิเคราะห์ที่ได้จาก Pearson Chi-Square และ Likelihood Ratio ซึ่งให้ค่า Exact Sig. (2-sided) แตกต่างกันนี้อาจเนื่องจากตัวแปร alcohol มีระดับการวัดเป็นแบบอันดับ ซึ่งการทดสอบความเป็นอิสระของตัวแปรอิสระที่มีระดับการวัดเป็นแบบอันดับกับตัวแปรตามที่เป็นผลของการเป็นโรค malformation ควรใช้การทดสอบ Mantel – Haenszeltest สำหรับความสัมพันธ์เชิงเส้น (linear association) ในที่นี้ให้คะแนนสำหรับตัวแปร alcoholเป็น (0 , 0.5 , 1.5 , 4 , 7) และให้คะแนนสำหรับตัวแปร malfor เป็น (1 = แสดง , 2 = ไม่แสดง)บันทึกข้อมูลลงในแฟ้มข้อมูล mantel1.sav แล้วใช้คำสั่ง Crosstab ช่วยในการคำนวณ

ในการทดสอบความเป็นอิสระด้วยการทดสอบ Mantel – Haenzel test โดยใช้โปรแกรมSPSS ช่วยในการคำนวณ โดยใช้คำสั่ง Crosstab ขั้นตอนการใช้คำสั่ง มีขั้นตอนที่ 1 ถึง 4เหมือนกับที่อธิบายไว้แล้ว และเพิ่มเติมในขั้นตอนที่ 4 คือ

- ในหน้าต่าง Crosstabs : Statistics

คลิกที่ □ Chi – square

คลิกที่ □ Cochran's and Mantel – Haenszel statistics

คลิกที่ปุ่ม Continue หน้าต่างนี้จะถูกปิดไป

- ในหน้าต่าง Crosstabs

คลิกที่ปุ่ม OK จะได้ผลลัพธ์ดังภาพ

alcohol *malfor **Crosstabulation**

Count

		malfor		
		แสดง	ไม่แสดง	Total
alcohol	.0	17066	48	17114
	.5	14464	38	14502
	1.5	788	5	793
	4.0	126	1	127
	7.0	37	1	38
Total		32481	93	32574

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)
Pearson Chi-Square	12.082[a]	4	.017
Likelihood Ratio	6.202	4	.185
Linear-by-Linear Association	6.570	1	.010
N of Valid Cases	32574		

[a] 3 cells (30.0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is .11.

ผลลัพธ์ที่ได้ดูในตาราง Chi – Square Tests ได้ค่าสถิติ Linear – by – Linear Associationเท่ากับ 6.570 และค่า Asymp. Sig. (2-sided) เท่ากับ .010 ซึ่งน้อยกว่าระดับนัยสำคัญที่กำหนด(α = .05) จึงสรุปได้ว่า ปฏิเสธ H_0 นั่นคือ สภาพการดื่มอัลกอฮอล์ของมารดามีความสัมพันธ์กับการแสดงอาการของโรค malformation ในทารกแรกเกิด